

APPLICAZIONE DELLE CONICHE ALLO STUDIO DEGLI ARCHI:

Ricostruzione del rosone del claristorio centrale della cattedrale di Chartres mediante il software di geometria dinamica GeoGebra.

Dai rosoni alla risoluzione di un problema di tangenza tra circonferenze



Elaborato presentato dalla 3^aLSMB:

Mattia Conz, Davide Iuri, Samuel Taboga.

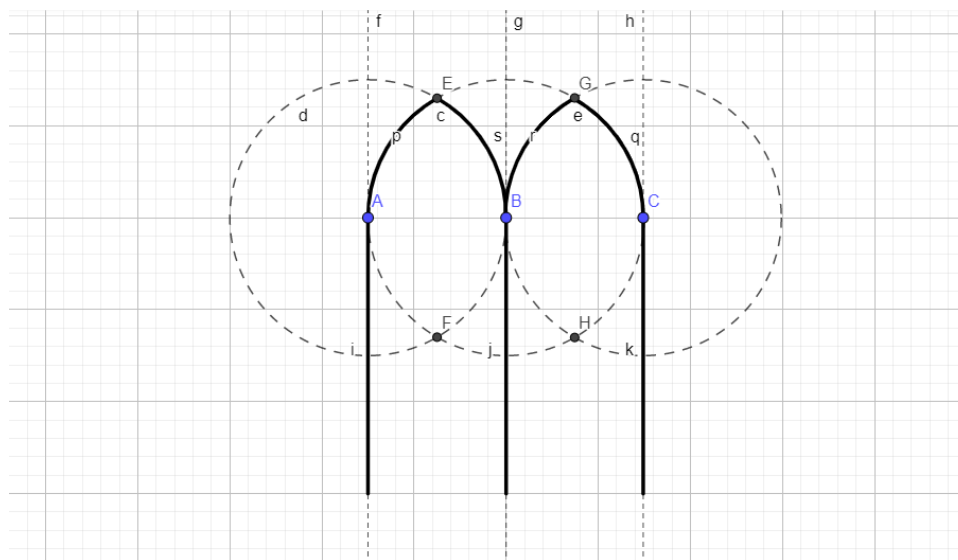
Introduzione al primo problema

Nel presente elaborato utilizzeremo il software di geometria dinamica GeoGebra per analizzare e riprodurre gli elementi geometrici caratteristici degli **archi a sesto acuto del claristorio della navata centrale della Cattedrale di Notre-Dame**.

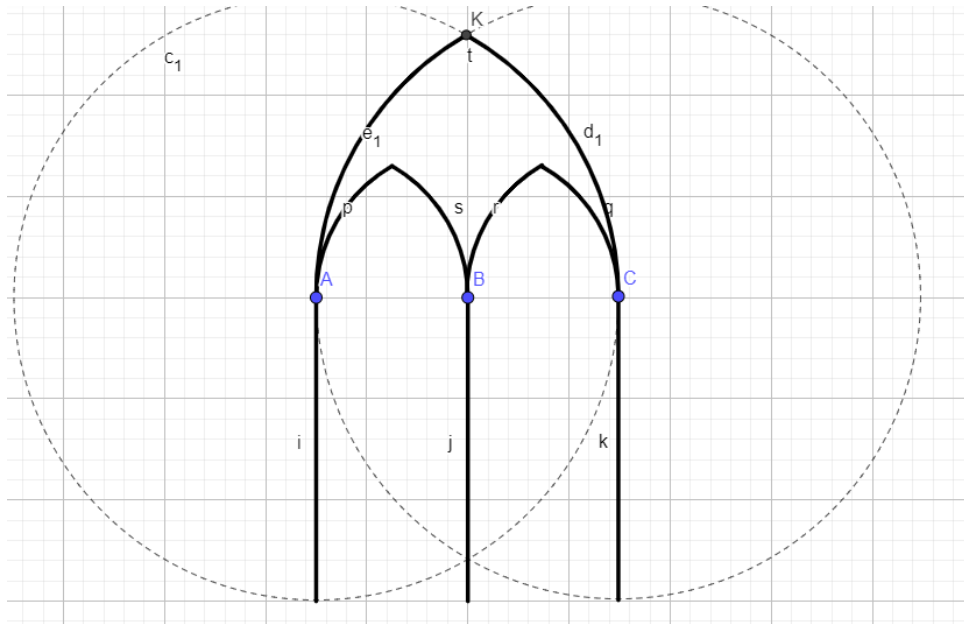
L'obiettivo è trovare relazioni tra matematica, archi a sesto acuto e i rosoni in essi inseriti come motivo ornamentale.

La cattedrale gotica di Notre-Dame possiede cinque navate delle quali andremo a considerare la più grande, ovvero la navata centrale. Questa navata ha tre piani, l'ultimo dei quali si chiama claristorio perché ricco di vetrate che fanno entrare la luce esterna. A questo piano ci sono archi a sesto acuto che sono racchiusi, insieme a rosoni rotondi, dentro altri archi a sesto acuto più grandi, dai quali poi partono le volte.

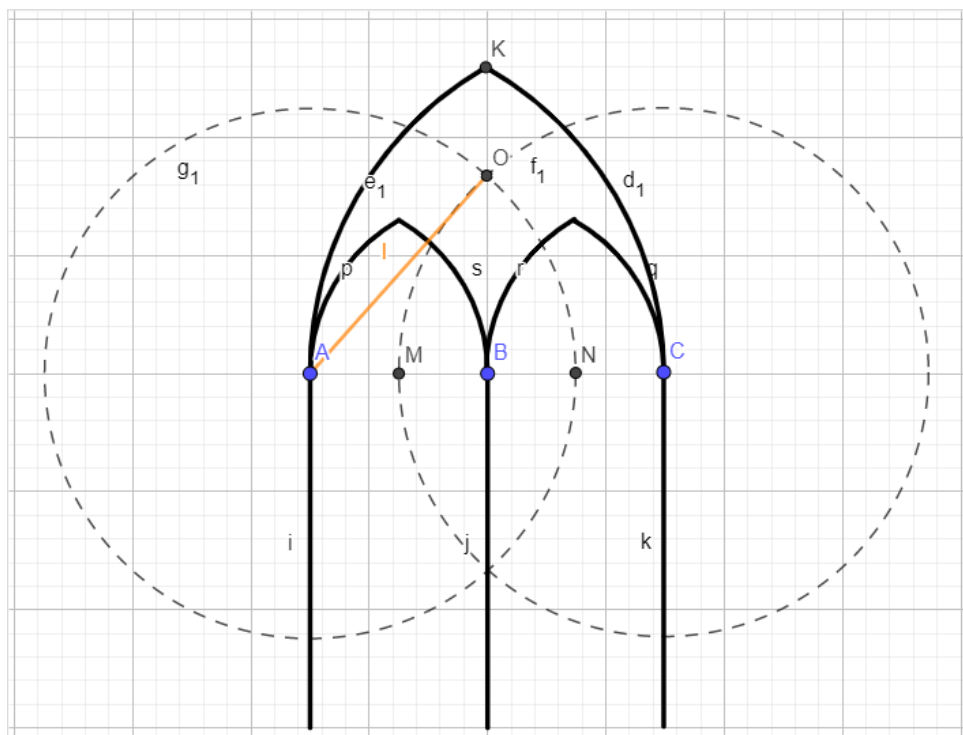
Per riprodurre tali archi, tracciamo inizialmente due archi di circonferenza con apertura pari alla distanza tra le colonne, centrando di volta in volta il compasso sui due capitelli.



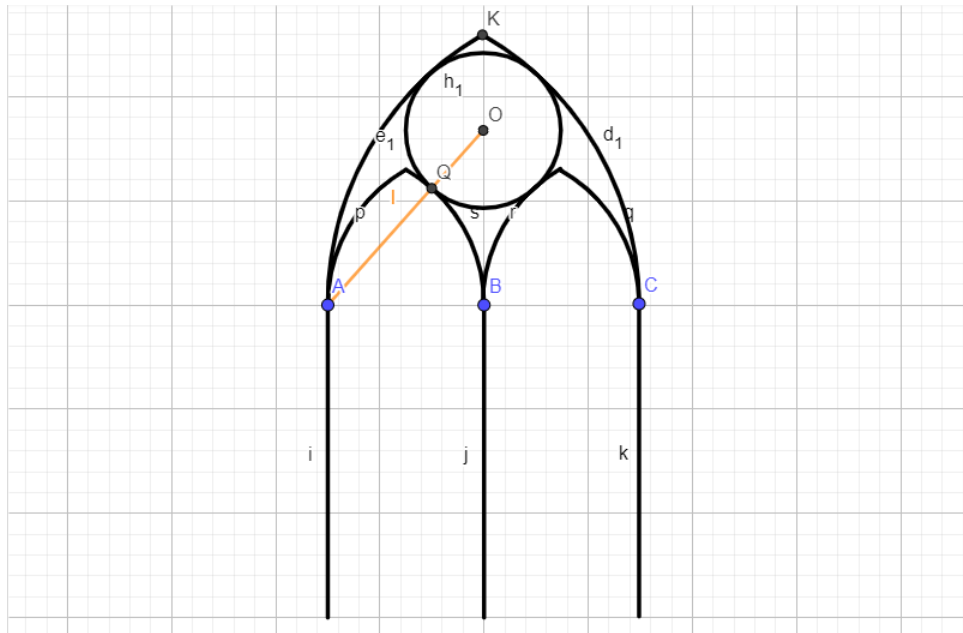
Per costruire un arco a tutto sesto che ne comprenda due affiancati è sufficiente ripetere la costruzione in modo identico usando ora come apertura del compasso il doppio della distanza tra due colonne e come centri i punti di raccordo tra arco e fiancata delle colonne esterne.



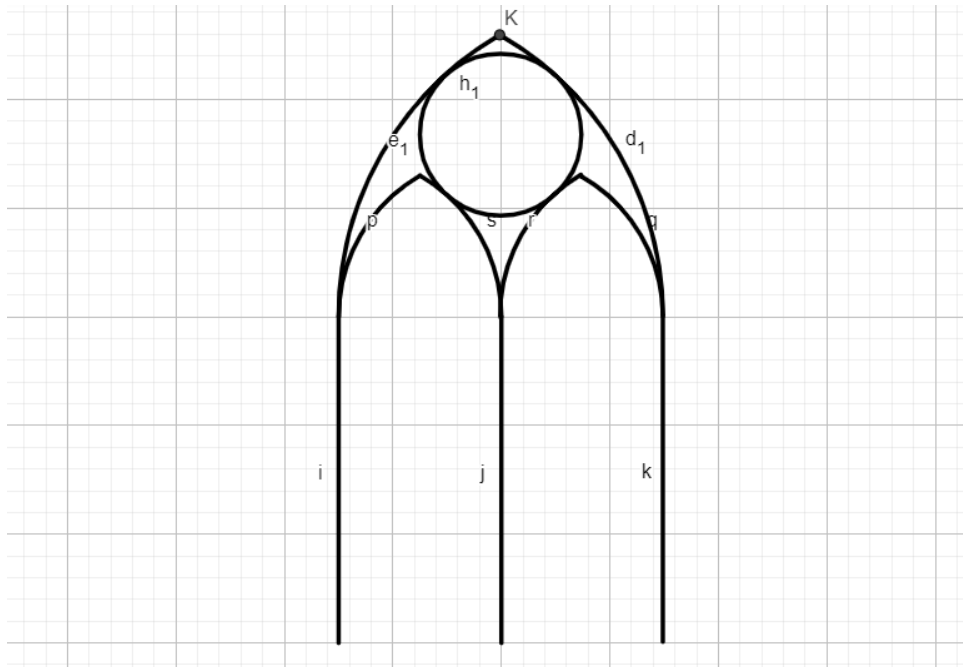
Per costruire il **rosone** bisogna creare un **cerchio tangente ai due archi piccoli e all'arco grande**. Questo cerchio deve essere tangente internamente alla metà di destra dell'arco grande ed esternamente alla metà di destra dell'arco piccolo di sinistra. Entrambe le metà di arco sono archi di cerchio. Il centro del rosone sarà equidistante dai centri delle circonferenze precedentemente tracciate, ed è possibile disegnarlo come intersezione di due cerchi: i centri sono gli stessi di quelli dell'arco grande, e i raggi sono $\frac{3}{2}$ della distanza tra le colonne.



Una volta trovato il centro dobbiamo unire con un segmento questo punto ad una delle colonne esterne, individuando l'intersezione del segmento con l'arco interno.

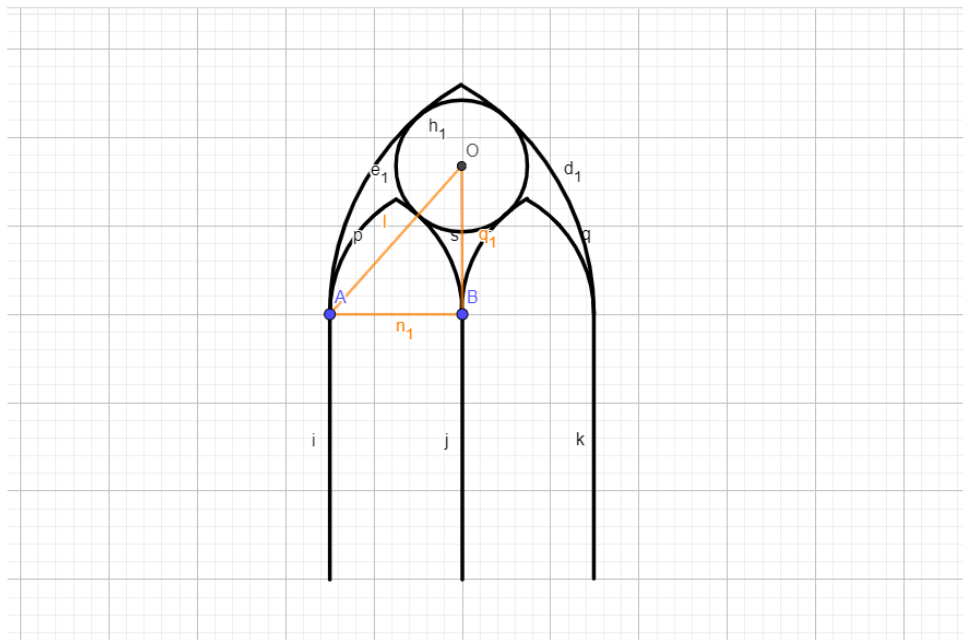


La distanza tra centro e intersezione è il raggio del rosone, ed è possibile quindi completare la costruzione.



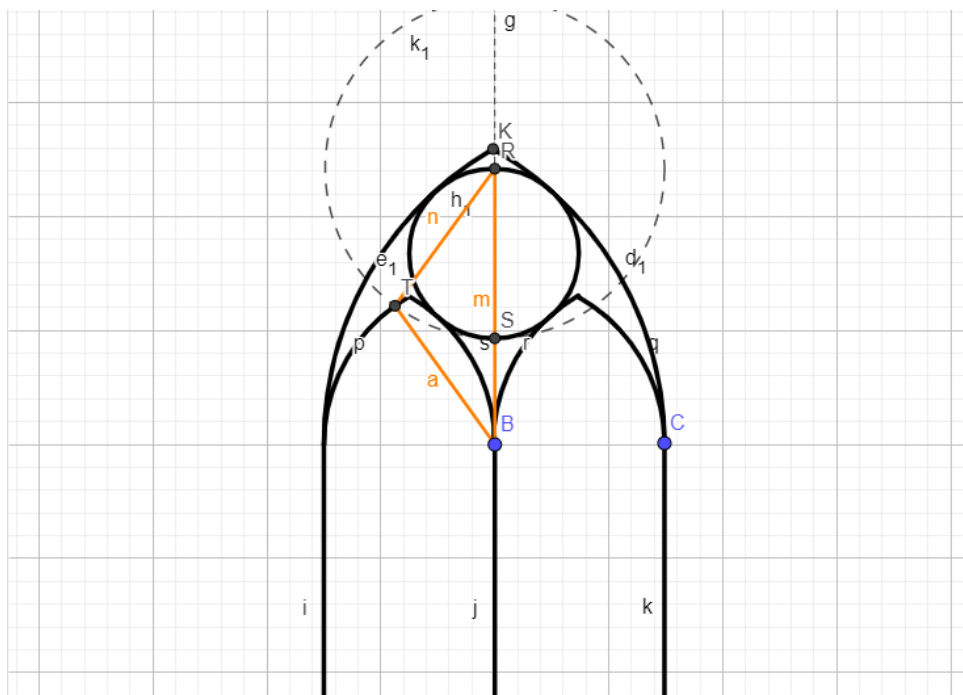
Per **calcolare le proporzioni** fissiamo come unità di misura la distanza tra le colonne, di modo che il rosone abbia raggio $\frac{1}{2}$. Per la simmetria della costruzione, il centro del rosone si trova sulla stessa retta che contiene

anche la colonna centrale. Chiamiamo h la distanza del centro del rosone dalla base della colonna.

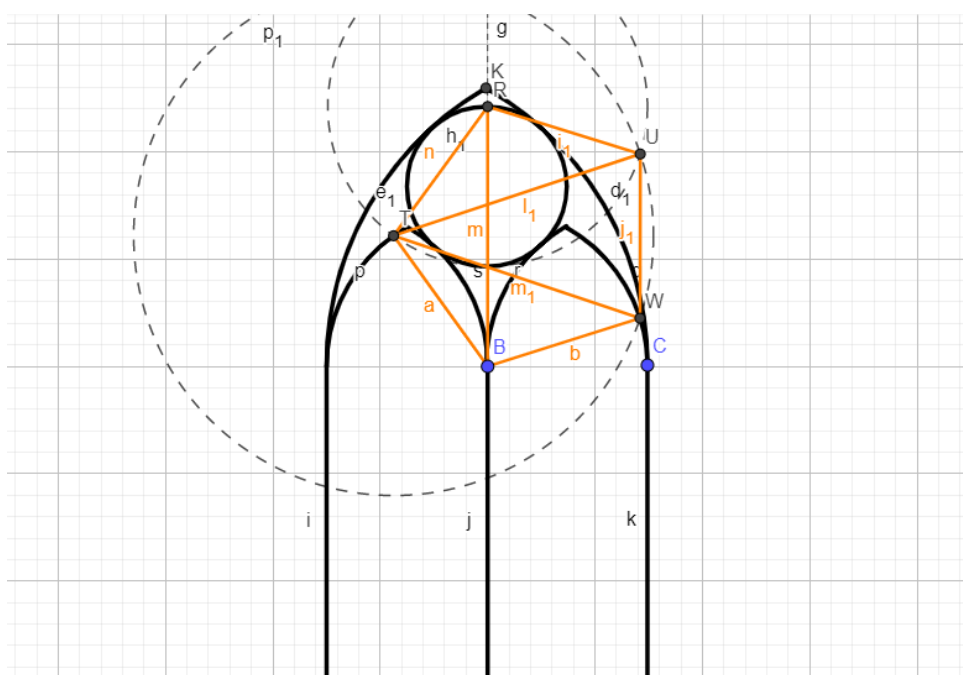


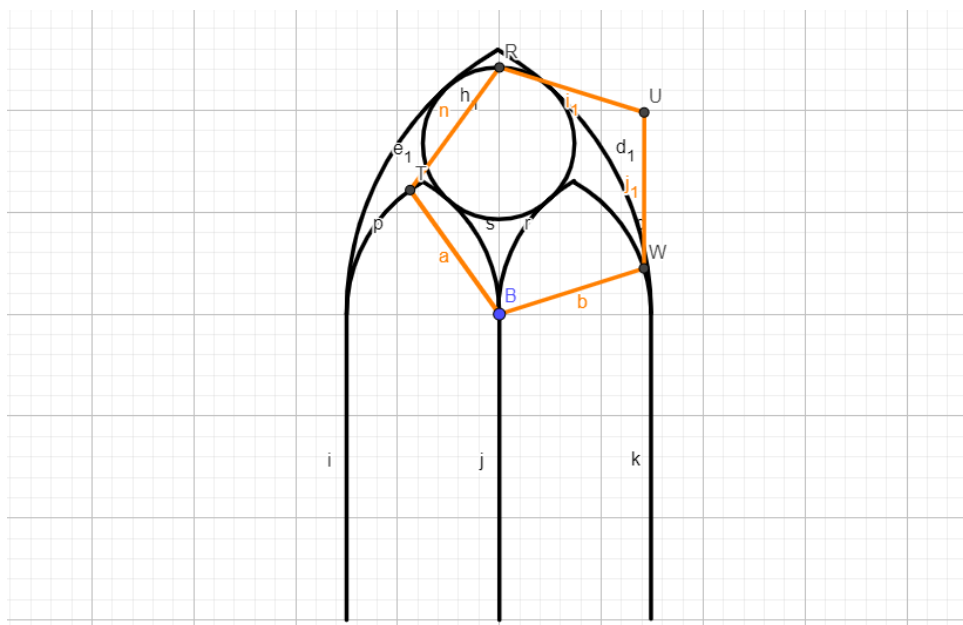
Uniamo il centro del rosone ad una colonna laterale, ottenendo un triangolo rettangolo del quale conosciamo l'ipotenusa, che è $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, e la base, che è 1. L'altezza h si ricava con il teorema di Pitagora: $h^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$, da cui $h = \frac{\sqrt{5}}{2} = \varphi - \frac{1}{2}$, dove φ è il rapporto aureo.

Da questo calcolo ricaviamo che **la distanza tra la colonna centrale e la cima del rosone è il numero aureo φ** in accordo con la ricerca di proporzioni armoniche caratteristica dell'architettura gotica. **Il rapporto aureo è quello che sussiste tra la misura della diagonale e la misura del lato di un pentagono regolare.** Per verificare tale rapporto all'interno della costruzione realizzata, abbiamo individuato una diagonale riportando col compasso la distanza tra le colonne per individuare anche i primi due lati.

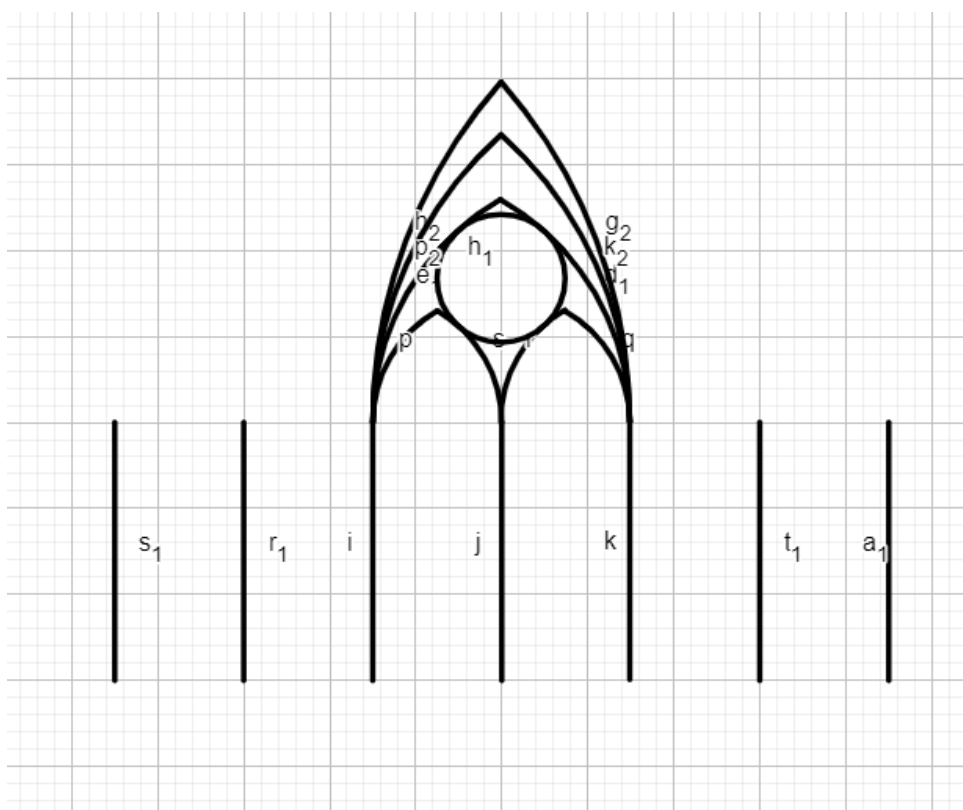


Riportiamo ancora due volte la diagonale e i lati fino ad ottenere un pentagono regolare.





L'arco grande, che racchiude i due piccoli, ha i due centri posti sulle due colonne laterali. Se si aggiunge un'altra coppia di colonne, equidistanti, e le si usano come riferimento per i centri di cerchi di raggio 3, si ottiene un arco a sesto acuto più grande. Anche le dimensioni e la posizione del rosone cambiano. Aggiungendo un'ulteriore coppia, il raggio avrà misura 4 e così via.

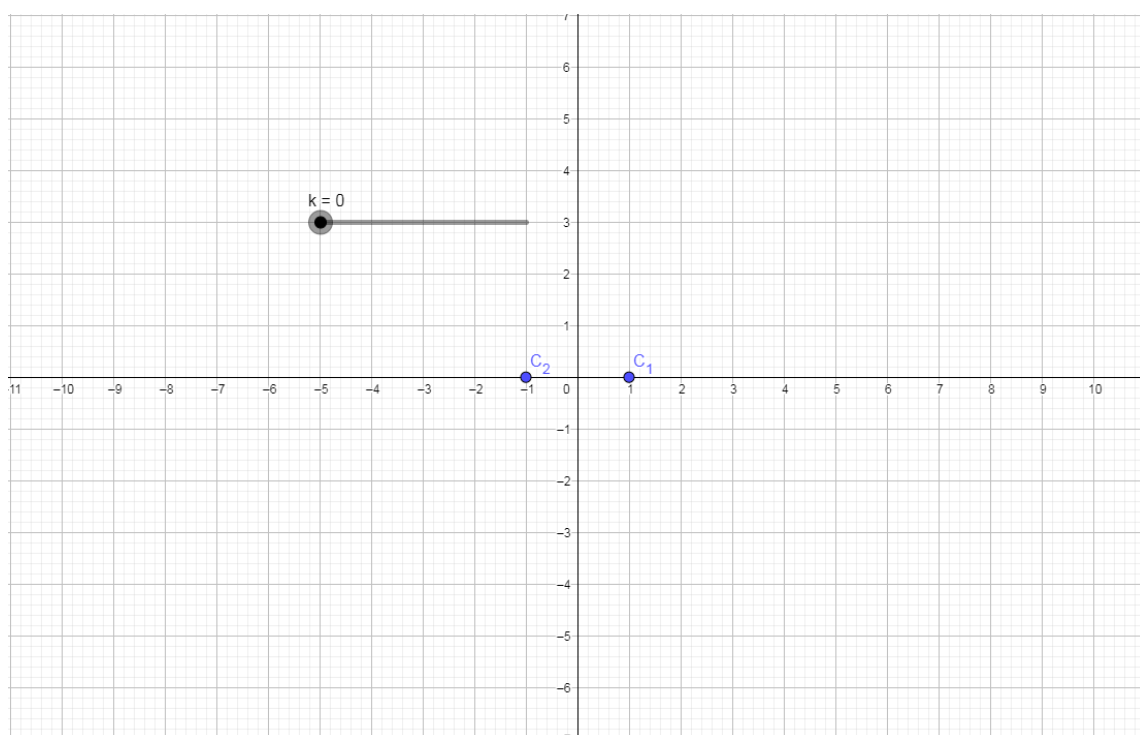


Introduzione al secondo problema

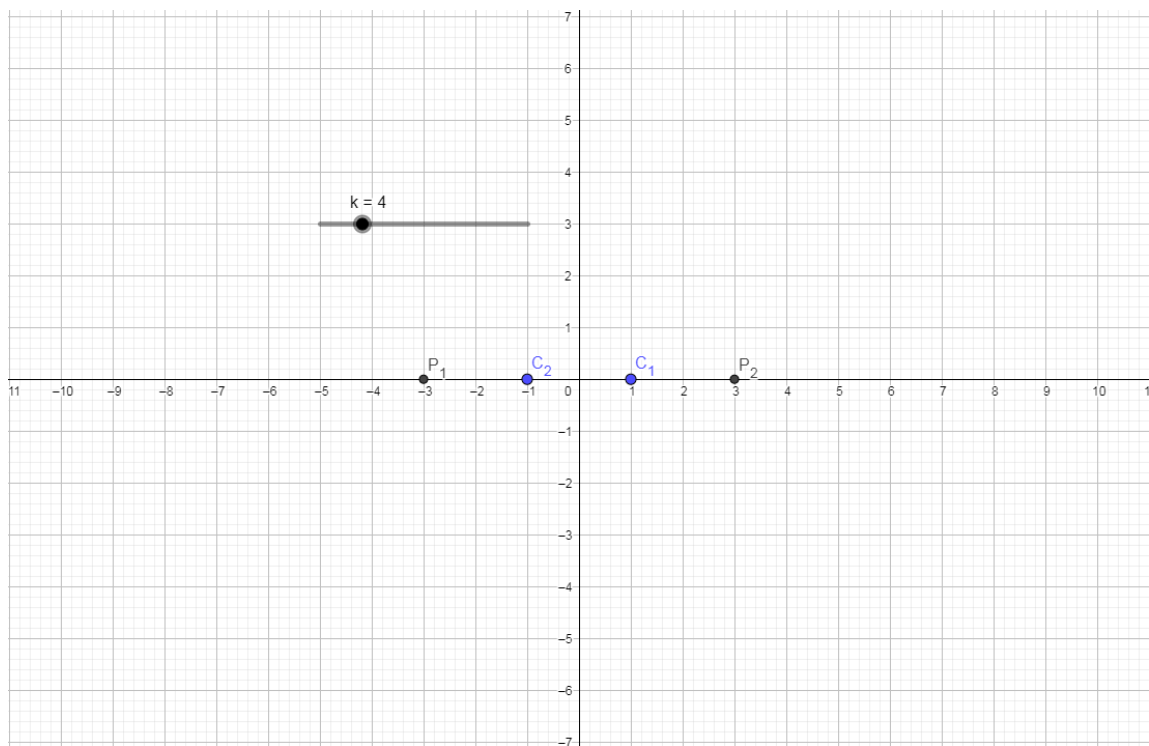
Ora analizziamo e risolviamo il seguente problema utilizzando la versione online del software Geogebra:

Siano dati due cerchi di raggio unitario centrati in $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, e due cerchi di raggio k centrati in $(-(k-1), 0)$ e $((k-1), 0)$, con k intero positivo. Quanto vale k se un cerchio tangente ai quattro cerchi ha raggio $\frac{3}{4}$?

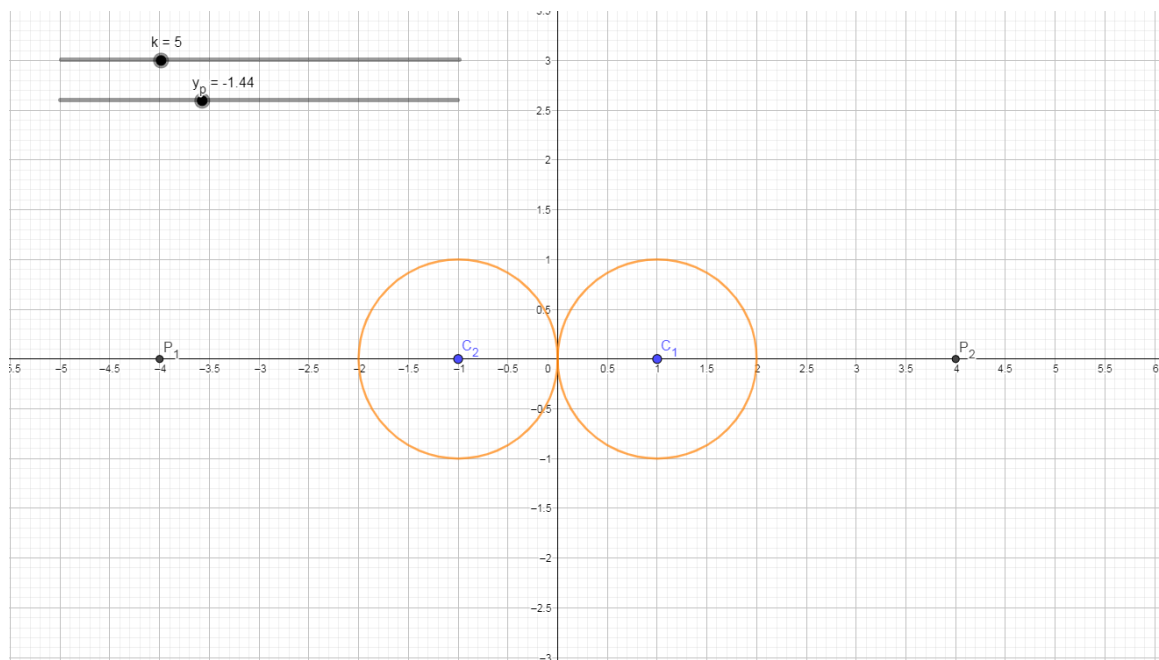
Passo 1: inseriamo due punti chiamati C_2 avente coordinate $(-1, 0)$ e C_1 avente coordinate $(1, 0)$; introduciamo anche uno slider chiamato k : esso rappresenterà il parametro che regola le coordinate dei centri e i raggi delle altre due circonferenze maggiori.



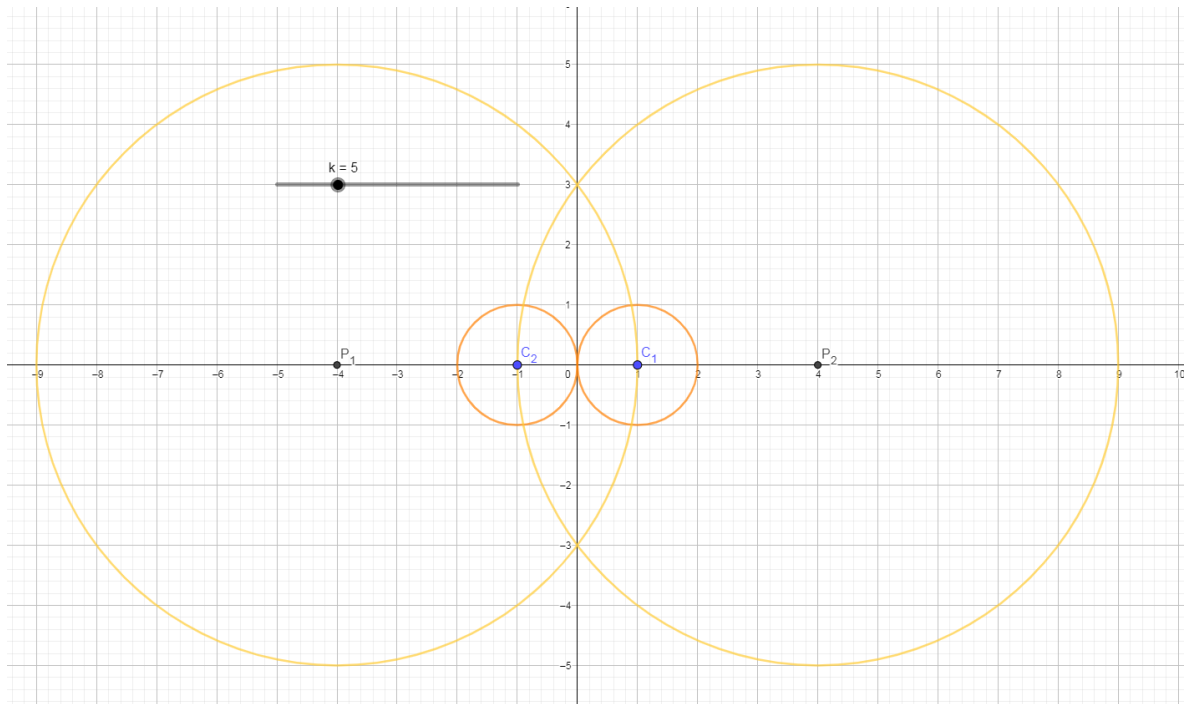
Passo 2: inseriamo due punti chiamati P_1 avente coordinate $(-(k-1), 0)$ e P_2 avente coordinate $(k-1, 0)$; introduciamo uno slider in modo da modificare il valore di k così come le coordinate dei punti definiti.



Passo 3: tramite lo strumento “circonferenza - centro e raggio” tracciare una circonferenza di centro C_2 e di raggio uguale a 1; ripetere lo stesso procedimento anche per il punto C_1 . Introdurre un altro slider chiamato y_p : esso rappresenterà le ordinate y del centro della circonferenza cercata.



Passo 4: tramite lo strumento “circonferenza - centro e raggio” tracciare una circonferenza di centro P_1 e raggio k ; ripetere lo stesso procedimento con P_2 . Le circonferenze tracciate dovrebbero passare per i centri delle circonferenze precedentemente costruite.



Passo 5: a questo punto per trovare la coordinata y del centro della circonferenza cercata si deve porre la distanza

$$C_1K_1 = \frac{3}{4} + 1 \rightarrow \sqrt{(0+1)^2 + (y_p - 0)^2} = \frac{7}{4} \rightarrow (0+1)^2 + (y_p - 0)^2 = \frac{49}{16} \rightarrow y_p^2 = \frac{33}{16} \rightarrow y_p = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Utilizzando lo strumento intersezione e facendo variare gli slider, possiamo verificare che questa circonferenza è tangente alle circonferenze più grandi nel caso il cui queste ultime hanno raggio $k=5$.

